代数学・幾何学Ｂ ５章 連立1次方程式ーその４

八杉　満利子[*]
京都産業大学・理学部

目 次

1　ベクトル空間・解空間

p.95-97

定義 1.1 （ベクトル空間）集合 X の要素に二つの演算 $+$（和）と $\alpha\cdot$（スカラー倍）が定義されていて、次の (1), (2) が成り立っているとき、$\langle X, +, \cdot\cdot\cdot \rangle$ をベクトル空間という。（ここでスカラーは実数としておくが、複素数でもよい。スカラーの集合をこのベクトル空間の係数体と呼ぶ。）

(1) $x, y \in X \Rightarrow x + y \in X$

(2) $x \in X, \alpha \in \mathbf{R} \Rightarrow \alpha \cdot x \in X$

$\alpha \in \mathbf{C}$ でもよい。$\mathbf{R}, \mathbf{C}$ はそれぞれ実数体、複素数体、である。$\alpha \cdot x$ は αx と書いてよい。

(1), (2) は、それぞれ「X は和（$+$）と、スカラー積（$\alpha\cdot$）について閉じている、という。

Example 1) n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ はベクトル空間である。実数を係数体としてもつ。

2) 多項式、実数関数、連続関数、微分可能関数、などはベクトル空間の例である。

定義 1.2 （部分空間,p.96）$V \subset X$ が X 上と同じ演算 $+, \cdot$ に関してベクトル空間になっているとき、V を X の部分空間、と呼ぶ。

---

[*] ２００３年後期

Example 1) n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ （$n>1$）の中で、$m<n$ ならば、$\mathbf{R}^m$ は部分空間。

2) 実数関数の中で連続関数、さらにその中で微分可能な関数、はそれぞれ部分空間。

上の例については、教室で説明する。

定義 1.3 （解空間）A は $m\times n$ の行列、$\mathbf{x}$ を n 次元ベクトル（n 個の変数）とするとき、

$$W=\{\mathbf{x}|A\mathbf{x}=\mathbf{0}\}$$

を行列 A の（方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の）解空間、と呼ぶ。

命題 1.1 （解空間の性質）解空間 W は $\mathbf{R}^n$ の部分空間である。

証明 $\mathbf{x}\in W$ は n 次元ベクトルだから、$\mathbf{R}^n$ の部分集合である。それがベクトル空間であればよい。$\mathbf{x},\mathbf{y}\in W$ とする。

$$A(\mathbf{x}+\mathbf{y})=A\mathbf{x}+A\mathbf{y}=\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$$

$$A(\alpha\mathbf{x})=\alpha A\mathbf{x}=\alpha\mathbf{0}=\mathbf{0}$$

定理 1 （次元定理：p.96 定理 5.6）A が $m\times n$ 行列で、W が $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の解空間であるとき、

$$dimW=n-rankA$$

とくに $rankA=n$ ならば、$dimW=0$、ゆえに $W=\{\mathbf{0}\}$。

なぜならば、W は、解が 0 になる部分だから、$rankA$ 分（１次独立な解の個数）だけは W に入っていない。したがってその残り $n-rankA$ が W の次元になる。

$dimW$ は W の基底のベクトルの個数であるから、$dimW=0$ とは、$W=\{\mathbf{0}\}$。$\{\mathbf{0}\}$ がベクトル空間にになることは確かめておくこと。

p.97 の例題 5.6 の説明（計算は自分で！）

A のサイズは 2×5 で、$rankA=2$、ゆえに $dimW=5-2=3$。解の組を任意定数 c_1,c_2,c_3 に関するものに分離して得られる 3 個のベクトルは W の基底である。

p.95 の例題 5.5 は $n=4, rank=2, dimW=2$ で、２個のベクトルは W の基底である。

例 $2x+y=0$

$n=2, A=(2\ 1), rankA=1, dimW=1$。$x=c$ とおくと $y=-2c$。解は $\mathbf{u}=c\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$。すなわち、上の方程式の解空間（解の集合）は、ベクトル

$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ の延長である直線である。これはまさに与えられた方程式から得られる $y = 2x$ の直線である。

例 $2x + y - z = 0$

$n = 3, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, rankA = 1, dimW = 2$。$x = c_1, z = c_2$ とおくと、$y = c_2 - 2c_1$。ゆえに解は

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと、解空間 W は、3 次元空間の中の $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ の張る平面である。この平面の上ではつねに $2x + y - z = 0$ が成り立っている。