代数学・幾何学Ｂ ５章 連立1次方程式ーその３

八杉　満利子*
京都産業大学・理学部

目 次

1　同次連立１次方程式

p.94, 5.4 同次連立１次方程式と部分空間

$$A = (a_{ij});\ i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

のとき、連立方程式

$$\Sigma_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0; i = 1, 2, \cdots, m$$

を「同次連立１次方程式」と呼ぶ。連立１次方程式の右辺の $\mathbf{b}$ が $\mathbf{0}$ の場合である。「同次」とは、式に現れる各項が変数の１次の係数倍になっていることを表す。（左辺は係数が 0 の場合になる）

同次連立１次方程式の解について考える。$\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は自明な解である。では、自明な解以外にも解はあるだろうか？

p.95, 定理 5.5 で、解の性質を明らかにしている。すなわち

(1)　解が自明なものだけである $\Leftrightarrow rankA = n$

*２００３年後期

（p.92, 定理 5.4(1) により、$rankA = n$ のとき、解は 1 個であり、自明な解があるのだから、他にはない。また、$rankA(= k) < n$ のとき定理 5.4(2) により、解は（この場合 $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ だから）

$$c_1\mathbf{g}_1 + c_2\mathbf{g}_2 + \cdots + c_{n-k}\mathbf{g}_{n-k}$$

の形で、$c_1, c_2, \cdots, c_{n-k}$ は任意の実数なので、解は自明なものだけではない。

(1) の証明から (2) も得られた。

この場合、拡大係数行列 $(A\ \mathbf{0})$ を作っても、最後の列ベクトルは $\mathbf{0}$ であり、その各項を係数倍しても互いに加減しても値は 0 なので、書く必要はない。したがって、（拡大でない）係数行列 A の階段行列を作る。5.3 節の解の求め方の特別な場合（$\mathbf{d} = \mathbf{0}$）になる。p.95 の例題 5.5 で実際に解法を見る。

問題　（教室で解く）　(1)　（自明でない解をもつ例）

$$x + z = 0$$

$$x + y - z = 0$$

$$x - y + 3 = 0$$

(2)　（自明な解のみの例）

$$x + y + z = 0$$

$$x + 2y - z = 0$$

$$x - y + 2z = 0$$

2　ベクトル空間

p.95 → ベクトル空間、部分空間、解空間