代数学・幾何学Ｂ ５章 連立1次方程式—その２

八杉　満利子*
京都産業大学・理学部

目 次

1　拡大係数行列

p.90, 5.3 連立１次方程式

未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ と１次方程式 $H_1, H_2, \cdots, H_m$ が与えられたとする。ただし $H_i, 1 \le i \le m,$ は次の形とする。

$$H_i \qquad \Sigma_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (5.6),$$

$$A = (a_{ij}), \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

とおけば、(5.6) は

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

と書ける。

定義 1.1 （係数行列）上で定義された A を (5.6) の係数行列と呼ぶ。また

$$A^* = (A\ \mathbf{b})(= (a_{ij}\ \mathbf{b}))$$

を (5.6) の拡大係数行列と呼ぶ。

* ２００３年後期

例　$2x+3y+z=2, x+2y+5z=4$ の係数行列と拡大係数行列はそれぞれ

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

拡大行列 A^* の階段行列を作るとは、A の部分を階段行列にする操作を A^* 全体に行い、A の部分が階段行列になったら終了（p.91 の階段行列を参照)。（このとき $\mathbf{b}$ の部分も変形されるが、変形した結果に対して特別な条件はない。）この結果を拡大係数行列 A^* の階段行列と呼ぶ（A' と表そう)。A の部分の階段行列を Q、$\mathbf{b}$ の部分の変形結果を $\mathbf{d}$ とすれば、

$$A' = (Q\ \mathbf{d})$$

となる。A の階数は Q の階数で決まる。最初の方程式の解 $\mathbf{x}$ は

$$Q\mathbf{x} = \mathbf{d} \qquad (5.7)$$

の解である。（行基本操作によって解は変わらない。）(5.7) の i 番目の式は $x_{q_i} + ... = d_i$ の形になる。（p.91, (5.7) を参照）$k+1$ 番目から下は右辺は 0 になることに注意。また、$i \leq k$ のとき、x_{q_i} の上の項（各式の q_k 番目の項）はすべて 0 である。

この方程式を見やすくするために

$$y_i = x_{q_i}(1 \leq i \leq k), y_{k+1} = x_{q_k+1},$$

$$y_{k+2} = x_{q_k+2}, \cdots, y_n = x_n$$

とおいて書き直したのが p.92, (5.8) である。（ほんとに見やすいかどうか、はともかく、数学的にはこのほうが扱い易い）係数の添え字を式の順番と y の番号によって表す。（たとえば第二式の y_{k+1} の係数は $\gamma_{2(k+1)}$）

$k+1$ から下は右辺が 0 だから、$d_j = 0(j \geq k+1)$ でなければ方程式 (5.8) は成り立たない、つまり最初の $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は $\mathbf{x}$ に関して解けない、あるいは解をもたないことがわかる。

$d_j = 0(j \geq k+1)$ ならば、任意の定数
$c_1, c_2, \cdots, c_{n-k}$ について

$$y_{k+1} = c_1, y_{k+2} = c_2, \cdots, y_n = c_{n-k}$$

とおいて、各 $y_i, 1 \leq i \leq k$ はそれ以後の右辺の項を d_i から引けば求められる。$y_{k+1}, y_{k+2}, \cdots, y_n$　（$n-k$ 個）は任意、すなわち自由なので、この方程式の自由度が $n-k$ である、という。

解はたとえば

$$y_1 = d_1 - \gamma_{1(k+1)}c_1 - \gamma_{1(k+2)}c_2 - \cdots - \gamma_{1n}c_{n-k}$$

一般に $i \leq k$ について

$$y_i = d_i + c_1(-\gamma_{i(k+1)}) + c_2(-\gamma_{i(k+2)}) + \cdots + c_{n-k}(-\gamma_{in})$$

となる。また、$y_{k+j} = c_j, j = 1, \cdots, n-k$ であり、$d_{k+j} = 0$ なので、$\gamma_{(k+j)(k+j)} = 1, \gamma_{(k+j)(k+l)} = 0(j \neq l)$ と考えれば、P.92, (5.9)、(5.9) になる。

以上をまとめたものが p.93 の定理 5.4 である。この定理にいたる途中で、階数と方程式の解の求め方が得られたことに注意。

例題 5.4 が丁寧に解説してあるので、ゆっくり読んで理解してください。

例 次の連立方程式を、拡大係数行列の階段行列を作って、求めよ。(教室で実行)

$$x - 3y + z = 2$$

$$2x - y - z = 3$$

$$x + 2y - 2z = 1$$

演習問題 1) $x + 2y = 3,\ 2x + 3y = 5$

2) $x + y + z = 1,\ x - 2z = 0$