代数学・幾何学Ｂ　４章 線形写像—その１

八杉　満利子*
京都産業大学・理学部

目 次

1　写像 **1**

2　線形写像 **1**

3　線形写像の表現行列 **3**

1　写像

4.1 写像 (pp.63-65)

このセクションはざっと読んでおいてください。写像の概念、写像のグラフ、等についての詳細は、「集合と論理２００３」を参照してください。

今後全体として、主に空間 $\mathbf{R}^3$ (３次元空間) または $\mathbf{R}^2$ (平面) で考える。

X, Y をこのような空間とする。空間というのはたとえば $X = \mathbf{R}^2$ ならば二つの座標で表される数の組 (a, b) の集合と考えられる。したがって $P \in X$ とするとき、P は空間 X の点とも集合 X の要素とも考えられる。$f : X \to Y$ は f が X から Y への写像であることを表す。$f(P) = Q$ のときに $f : P \mapsto Q$ とも書き、Q を P の f による像と呼ぶ。

2　線形写像

4.2 線形写像　(pp.66-67)

写像の中でとくにある特殊な性質をもつ「線形写像」がこの科目の主題である。

一般に空間 $\mathbf{R}^n$ で書いてあるが、$n = 1, 2, 3$ で理解できればよい。

記号 $f : X \to Y$　すなわち f は空間 X から Y への写像。

$k \in \mathbf{R}$ k は実数 (ベクトルでない)

---

*２００３年後期

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \cdots$ 空間 X, Y 等のベクトル
$\mathbf{0}$ ゼロベクトル

定義 **2.1** （線形写像）$f : X \to Y$　が次の条件を満たすときに f は X から Y への線形写像、または 1 次写像、である、という : すべての $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X, k \in \mathbf{R}$ について

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b}) \tag{1}$$

$$f(k\mathbf{a}) = kf(\mathbf{a}) \tag{2}$$

命題 **2.1** f が線形写像であることと、次の条件は同値である。
すべて $\mathbf{a}, \mathbf{b}, k \in \mathbf{R}, l \in \mathbf{R}$ について

$$f(k\mathbf{a} + l\mathbf{b}) = kf(\mathbf{a}) + lf(\mathbf{b}) \tag{3}$$

証明は p.66 にある。

定義 **2.2** （線形変換）線形写像が、とくに定義域 X と値をとる集合 Y が同じ次元であるときに、線形変換、または 1 次変換、と呼ぶ。

系 **1** (1) $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$
(2) $f(-\mathbf{a}) = -f(\mathbf{a})$

証明　$f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{a} - \mathbf{a}) = f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$

$$f(-\mathbf{a}) = f((-1)\mathbf{a}) = (-1)f(\mathbf{a}) = -f(\mathbf{a})$$

例題 4.2　（一般に X, Y がどの次元でも）$f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}$　は線形写像:

$$f(k\mathbf{a} + l\mathbf{b}) = 2(k\mathbf{a} + l\mathbf{b}) = 2k\mathbf{a} + 2l\mathbf{b}$$

$$= k(2\mathbf{a}) + l(2\mathbf{b}) = kf(\mathbf{a}) + lf(\mathbf{b})$$

例題 4.3　（例 : $X = Y = \mathbf{R}^1$ のとき）$f(x) = 2x + 1$　は線形でない:

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 2(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + 1 \neq (2\mathbf{a} + 1) + (2\mathbf{b} + 1) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b})$$

例題 4.4'　$f(x) = x^2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$　は $\mathbf{ab} \neq 0$ のとき、線形でない :

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2$$

$$\neq \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b})$$

問題 4.1: 解答は p.127 にある。

例題 4.5: 上の例題 4.2 で一般的解法を示している。

一般に行列 A で定義される写像 $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ が線形である必要十分条件は $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ である。この事実は大事。

練習問題 4.2.1. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ であるとき、$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

と定義する。f が線形写像 (変換) であることを示せ。(条件 (1),(2) または条件 (3) を示す。実際に $A\mathbf{x}$ を計算してみること。)

練習問題 4.2.2. 同じ A について $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を

$$g(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で g を定義する。g が線形写像でないことを示せ。(条件 (1),(2) の少なくとも一方が成り立たないことを示す。どちらでも好きなほうでよい。)

問題 4.2 $f(\overrightarrow{O}P) = \overrightarrow{O}P$ を角度 θ だけ原点 $\mathbf{0}$ を中心に回転。

この f が線形写像であることを示せ。

解答は pp.127-128 に。講義では考え方の説明のみをする。ポイントは、$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ が作る図形と、$f(\mathbf{x})$ と $\mathbf{y}$ が作る図形は合同でる。$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ が作る図形を角度 θ 回転したのが $f(\mathbf{x})$ と $\mathbf{y}$ が作る図形になるわけだから、$\mathbf{x}+\mathbf{y}$ と $f(\mathbf{x}+\mathbf{y})$ は合同な図形の対角線であり、したがって一致するはず。

結論 : 例題 4.5 と問題 4.2 により、平面のベクトルの伸縮および原点を中心にした回転、およびそれらの組み合わせは、線形写像である。(実際には平面から平面への線形写像はこれらの組み合わせで定義されるものだけである。)

3 線形写像の表現行列

4.3 線形写像の表現行列 (pp.67-72)

$m \times n$ 行列 A と線形写像 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ が互いに対応する。すなわち

命題 **3.1** 1) $m \times n$ 行列 A によって

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \tag{4}$$

と定義される写像 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ は線形写像である。

2) $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ が線形写像ならば、4 が成り立つ $m \times n$ 行列 A が存在する。

1) はすでに示された。2) がこの節のポイントである。

4 が成り立つときに、行列 A が写像 f を表現する、A は f の表現行列である、などという。

例題 4.6: 平面上の回転の表現行列は

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

である。

証明は pp.68-69 にある。講義中に説明する。

平面の基本ベクトルが $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ であることを思い出すこと。

練習問題 4.3.1 平面上の図形を $-\frac{\pi}{6}$ だけ回転するときに、表現行列を求めよ。また、そのとき、ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は何になるか ?(例題 4.6 で $\theta = -\frac{\pi}{6}$ とおいて計算すればよい。)

注意 : 写像 f に対する表現行列は、座標系によって異なる。すなわち、基本基底を何にするか、によって異なる。例題 4.6 では基底として正規直交系 (標準基底) を使っている。

定義 **3.1** （ 標準基底 ） $n = 1, 2, \cdots$ について、$\mathbf{R}^n$ の標準基底は次のような n 個の n 次元ベクトルの列 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ である。$i = 1, 2, \cdots$ について

$$\mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここで、ベクトルの各要素は、i 番目が 1、それ以外は 0 である。

$\mathbf{R}^n$ の任意のベクトルは標準基底の 1 次結合で現すことができるので

$$\mathbf{R}^n = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n \rangle$$

と記す。

命題 **3.2**　標準基底は正規直交系である。すなわち、各 i について $\|\mathbf{e}_i\| = 1$ であり、$i \neq j$ ならば $\mathbf{e}_i \perp \mathbf{e}_j$、すなわち、$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$。

簡単な計算であるから、確かめること ($n = 2, 3$ で)。

定理 **1** （ 定理 4.1,p.70 ）$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ が線形写像であるとき、f の標準基底による f の表現行列 A は

$$A = (f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \cdots, f(\mathbf{e}_n))$$

である。

証明は p.70 にある。$\mathbf{R}^n$ の任意のベクトルが標準基底の 1 次結合で表現できることと、f の線形性により、あとは計算すればよい。

練習問題 4.3.2　上の定理の証明を $n = 2, 3$ で具体的に書いて見る。

例題 4.7 [鏡像 2]　（ 鏡像 1 は p.8 の問題 1.4 ）平面上の原点を通る直線 $\ell : (\mathbf{a}, \mathbf{x}) = 0$ に関して対称的に位置ベクトルを移す写像 f は線形変換で、その表現行列は

$$E - \frac{2}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$$

ただし、$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$。

証明は p.71 にある。授業中に説明。

例題 4.8、問題 4.3 (pp.71-72) は読んでおくこと。問題 4.3 の解答は巻末にある。

例題 4.8 の説明：x 軸は不変。したがって

$$f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

あとは yz-平面で y 軸を z 軸のほうへ α だけ回転する。したがって

$$f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}; f(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

で、前の A になる。