代数学 ・幾何学 A　課題 2002-1　八杉担当 解答つき

(提出 :5月１５，２２，２９日講義終了後手渡し (期日厳守))

注意　＊このシートを表紙にすること。その下に添付シートをつける。全体をホッチキスで留めること。　氏名等記入を忘れないこと。

＊返却しないので、解答は別途保存しておくこと。

＊１０点満点

学年　　学籍番号　　氏名

1. ２次元ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ を次のように定義する。

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3.4 \\ 4.3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2.3 \\ 1.7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2.2 \\ -1.3 \end{pmatrix}$$

このとき

(1)　$\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 0.5\mathbf{c} =$ $\begin{pmatrix} \boxed{\text{-2.3}} \\ \boxed{8.35} \end{pmatrix}$

(2)　$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ $\boxed{\text{-0.51}}$

(3)　$\| \mathbf{c} \| =$ $\boxed{\sqrt{6.53}}$ $=$ $\boxed{2.555}$

2. ３次元ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ を次のように定義する。

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 2.1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1.7 \\ 1.3 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

このとき

(4)　$\mathbf{u} \times \mathbf{v} =$ $\begin{pmatrix} \boxed{1.05} \\ \boxed{\text{-0.6}} \\ \boxed{5.13} \end{pmatrix}$

注 :×　(外積) と内積をまちがえないこと。

(5)　$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ を Mathematica を使って描画せよ。

注 :配布したプリントは、３次元グラフィックスの基本的使い方を示している。$\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ と $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ をそれぞれ描くこと。四辺形は外積の大きさは表すが、ベクトルは表さない。したがって “Polygon” を使うのは妥当ではない。なお、矢印は”arrow” を読み込んでもよいし、自分で”Line” によって作ってもよい。２次元でも同様。今回は矢印がなくてもよことにした。

Mathematica の使い方がわからない、という答案があった。１年のテキストをちょっと見直せばわかる程度のことしか要求していない。描画は、式で与えたベクトル等の幾何学的イメージを得るために必要であり、

Mathematica の使用により正確なイメージがつかめる。数学も「目で見る」(ときには耳で聞くことも) ことによって自然科学のように観察の対象となり、より良く理解できる。

3. (6) 二つの一次独立な 2 次元ベクトル $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ を各自あたえよ。(下は一例。描画で二つのベクトルが一直線上に〝なければ〟よい。)

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \boxed{3} \\ \boxed{2} \end{pmatrix}, \ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \boxed{-1} \\ \boxed{3} \end{pmatrix}$$

(7) $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}, \{s\mathbf{x}+t\mathbf{y} : 0 \leq s, t \leq 1, s+t=1\}$ を Mathematica を使って描画せよ。

注 :$\mathbf{x}, \mathbf{y}$ の作る平行四辺形の長いほうの対角線 (原点と頂点を結ぶ) が $\mathbf{x}+\mathbf{y}$、$\mathbf{x}, \mathbf{y}$ の矢印の先端を結ぶ線分が $\{s\mathbf{x}+(1-s)\mathbf{y} : 0 \leq s \leq 1\}$。

(8) (7) の描画を利用して、次の不等式を幾何学的に示せ。(解答は図示せよ。)

$$\| \mathbf{x}+\mathbf{y} \| \leq \| \mathbf{x} \| + \| \mathbf{y} \|$$

(演習問題 $1.5(2)$)

(ヒント :直角三角形の辺の長さの比較による。)

注 :「直角」がないほうがわかりやすかったかも。そうすれば「三角形の 2 辺の長さの和は一辺の長さよりも大きい」の一言でよい。直角三角形を使うのは、この事実を示すため。ピタゴラスの定理 (というのかな ?) を 2 回使う。