$$(a)\quad f(\begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix} \qquad (b)\quad f(\begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix}) = 3xy$$

$$(c)\quad f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2y \\ x \end{pmatrix} \qquad (d)\quad f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = x + y + 3$$

$$(e)\quad f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = 2y + x \qquad (f)\quad f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = x^2 + y^3$$

**答え** (c), (e)

2. 次の行列を $B$ とする. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$B$ で定義される 2 次元空間における線形写像 $f(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$ 、標準基底 $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e_2}\}$、基底 $\mathbf{u} = \{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ が与えられているとき、次の問いに答えよ。

(a) $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2)$ を求めよ。

(b) 行列 $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ の逆行列 $C^{-1}$ を求めよ。

(c) 基底 $\mathbf{e}$ と $\mathbf{u}$ に関する $f$ の表現行列 $A$ を求めよ。

**答え** (a) $f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

(b) $C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$

(c) $A = C^{-1} \begin{pmatrix} f(e_1) & f(\mathbf{e}_2) \end{pmatrix}$

$C^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 2 \\ \frac{-4}{3} & -3 \end{pmatrix}$

$$y+z=5$$

$$-2x-y+z=1$$

(a) $Eq$ の拡大係数行列 $D$ を求めよ。

(b) $D$ の階段行列 $K$ を求めよ。

(c) $K$ の階数と自由度を求めよ。

(d) $Eq$ の解を求めよ。

**答え** (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) 階数 $=2$　自由度 $=1$

(d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. $A$ は行列 $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

(a) $A$ の固有方程式を求めよ。

(b) $A$ の固有値を求めよ。

(c) $\lambda$ を $A$ の固有値の一つとするとき、$\lambda$ に対する固有ベクトルを求める連立 1 次方程式を表せ。

**答え** (a) $\lambda^2-4\lambda-1=0$

(b) $\lambda = 2 \pm \sqrt{5}$

(c) $\lambda = 2+\sqrt{5}$ の場合

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

方程式は

$$(1-\sqrt{5})x+2y=0$$

$$2x-(1+\sqrt{5})y=0$$

注　固有ベクトルを求めるには、上の方程式を解いて、

$x=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})y)$

$y=1$ とおいて、固有ベクトル $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \\ 1 \end{pmatrix}$ を得る。