２００５年度集合と論理：おさらい

担当：八杉満利子

平成 17 年 7 月 20 日

1　（集合の演算）U は集合、A, B, C をそれぞれ U の部分集合とする。このとき

$$(A \cup B^c) \cap (A \cup (B \cap C))^c = (B \cup A)^c$$

が成り立つことを示せ。

$$(A \cup B^c) \cap (A \cup (B \cap C))^c = (A \cup B^c) \cap (A^c \cap (B^c \cup C^c))$$

$$= (A \cap A^c \cap (B^c \cup C^c)) \cup (B^c \cap A^c \cap (B^c \cup C^c))$$

$$= \emptyset \cup (B^c \cap A^c) \cup (B^c \cap A^c \cap C^c) = B^c \cap A^c = (B \cup A)^c$$

（$(B^c \cap A^c \cap C^c) \subset (B^c \cap A^c)$　より）

2　（写像の性質各種）　（１）　　例　$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^3 - x^2 - 2x$

全域的（すべての実数 x について $f(x)$ が定義される）；単射でない（$f(x) = x(x+1)(x-2)$ であるから、たとえば $x = 0, -1, 2$ の三つの x の値で同じ関数値 $f(x) = 0$ となる）；全射（x がすべての実数を動くとき、関数値 $f(x)$ もすべての実数値をとる。すなわち任意の実数 y に対して、ある x があって（１個とは限らない）$f(x) = y$ となる）

$$G_f = \{\langle x, x^3 - x^2 - 2x\rangle \,|x \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$$

（２）　例 前回課題の問題　１．A はある会社の従業員の集合、B はその会社の部屋番号の集合、とする。写像　$f : A \to B$　は次のようなものである。　f は各従業員に、その人の作業場である部屋番号を対応させる写像である。全従業員にそれぞれ一つの番号を割り振ってあるが、同じ部屋を複数の人が共有している場合もある。すべての部屋が誰かの作業に使われ、空いた部屋はない。

全域的（各従業員に番号が割り当てられる）；単射でない（同じ番号を共有する複数の従業員がいる）；全射（すべての部屋、したがって部屋番号、が使われる）；

$$G_f = \{\langle p, n\rangle \,|p \in A, n \in \mathbf{B}, \quad n \text{ is assigned to } p\} \subset A \times B$$

この写像の条件を多少変更してみよう。

その１　部屋の代わりに作業区画というのがあり、通し番号が振られているものとする。各従業員はその人占有の１個の区画（番号）を割り当てられ、誰も使わない余分の区画もある。

全域的（すべての従業員は作業区画を割り当てられる）; 単射（ある作業区画が使用されるならば、それは一人の従業員のみ）; 全射でない（未使用の区画がある）

その２　　最初の条件であるが、外交員は部屋を与えられないとする。

会社の従業員全体からの写像とすれば、部分的（部屋番号が割り当てられない人がいる）; 単射でない ; 全射

3　（いいろいろな関係）　（１）　$R(m,n): m,n \in \mathbf{Z}$ で、n,m 両方とも偶数または両方とも基数

同値関係（同じ数は両方とも偶数、または両方とも基数 ; 変数の順序は関係ない ; m,n が両方とも偶数（奇数）であって n,l が両方とも奇数（偶数）ということはない。ゆえに $R(m,n), R(n,l)$ ならば、$R(m,l)$。すなわち推移律が成り立つ。）

（２）　変数 x の実係数多項式全体を $\mathbf{R}[x]$ と書く。$\mathbf{R}[x] \times \mathbf{R}[x]$ 上の関係 $less(p(x), q(x))$ を次のように定義する ; $p(x), q(x)$ の係数を x の最高次から比較する。ただし、ある次数がないとき、係数が 0 とする。$less$ は半順序。実際には（厳密ではない）全順序。

例 : $less(5x^2 - 2x + 1, 2x^3 - x),\ \ less(2x^3 - x, 2x^3 - 5)$

（３）　$\mathbf{R}[x] \times \mathbf{R}[x]$ 上の関係 $sless(p(x), q(x))$ を $q(x) = p(x) + r(x)$、ただし $r(x)$ の係数は負でない、とする。半順序であるが、全順序でない。

例 : $sless(x^2 - x, x^2 + x + 1)$:　　$(x^2 + x + 1 = x^2 - x + (2x + 1))$

順序のつかない例 : $x^2 + 1, x$

（４）（２）の $less$ は整礎でない。

例 : $\cdots less\ -(n+1)x\ less - nx\ less \cdots\ -2x\ less\ -x\ less\ x\ less$

4　（命題論理 : 論理式、真理値、和積標準形）

「論理パズルとパズルの論理」（遊星社、八杉＋林）より

第５章

問題 :「これがソックスならばこれはソックスじゃないの」がほんとうならば、これはソックスか？

$$(P \Rightarrow \neg P) \Rightarrow P$$

が恒真か？という問題。

$$\neg(\neg P \vee \neg P) \vee P; P \vee P; P$$

これは恒真でない。ゆえに仮定が正しくても、これがソックスとは限らない。

問題 : ”「これがソックスならばこれはソックスじゃない」ならば「これがソックスである」”といえるのはどんなときか？

上の論理式の変形からこの文全体は P と同値、したがってほんとに「これがソックスである」とき。

問題：アキ「赤い雪が降ったら、地震の前兆だって」

カズホ「もしアキの言うことが正しかったら、地震が起こるね」

ノゾミ「それじゃあ、もし赤い雪が降らなかったら、本当に地震が起こるんだ」

ノブ「こわーい。でもノゾミの言うことウソでしょ？」

カズホの言うことが正しいときに、ノブくんの希望的発言は正しいでしょうか？

アキ：$A \Rightarrow B$

カズホ：$(A \Rightarrow B) \Rightarrow B$

ノゾミ：$((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$

まずカズホの発言（ノゾミの発言の前提）の和積標準形を作る：

$$\neg(\neg A \vee B) \vee B; (A \wedge \neg B) \vee B; (A \vee B) \wedge (\neg B \vee B); A \vee B$$

ノゾミの結論の和積標準形は $A \vee B$。すなわち、ノゾミの発言は恒真、ゆえにノゾミは正しい。ノブくんの不安はもっとも？でも、だれも「地震が起こる」とは言っていないのです！